Blatt 11

①

Rechnungen der TM

$w = aabb$

$q_0\, a\, a\, b\, b$

$\check{a}\, q_1\, a\, b\, b$

$\check{a}\, a\, q_1\, b\, b$

$\check{a}\, a\, b\, q_2\, b$

$\check{a}\, a\, b\, b\, q_2\, B$

$\check{a}\, a\, b\, q_3\, b\, B$

B ergänzt → (4) !

$\check{a}\, a\, q_4\, b\, \check{b}\, B$

$\check{a}\, q_4\, a\, b\, \check{b}\, B$

$q_4\, \check{a}\, a\, b\, \check{b}\, B$

$\check{a}\, q_0\, a\, b\, \check{b}\, B$

$\check{a}\, \check{a}\, q_1\, b\, \check{b}\, B$

$\check{a}\, \check{a}\, b\, q_2\, \check{b}\, B$

$\check{a}\, \check{a}\, q_3\, b\, \check{b}\, B$

$\check{a}\, q_4\, \check{a}\, \check{b}\, \check{b}\, B$

$\check{a}\, \check{a}\, q_0\, \check{b}\, \check{b}\, B$

$\check{a}\, \check{a}\, \check{b}\, q_e\, \check{b}\, B$

→ wird akzeptiert

$q_e \in F$

„strikte Notation"

Aufgabe 1 a.

$w = aab$

$q_0\; a\; a\; b$

$\check{a}\, q_1\, a\; b$

$\check{a}\; a\, q_1\, b$

$\check{a}\; a\; b\, q_2\, B$

$\check{a}\; a\, q_3\, b\; B$

$\check{a}\, q_4\, a\; \check{b}\; B$

$q_4\, \check{a}\; a\; \check{b}\; B$

$\check{a}\, q_0\, a\; \check{b}\; B$

$\check{a}\; \check{a}\, q_1\, \check{b}\; B$

Turing-Maschine hält, ohne zu akzeptieren

$w = abab$

$q_0\; a\; b\; a\; b$

$\check{a}\, q_1\, b\; a\; b$

$\check{a}\; b\, q_2\, a\; b$

Turing-Maschine hält, ohne zu akzeptieren

übersichtlichere Schreibweise

Blatt 11

②

Aufgabe 1 (Forts.)

b) $L_2 = \{ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ $\quad \Sigma = \{a, b, c\}$

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, \{q_e\})$

$Q = \{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_e \}$

$\Gamma = \{ a, b, c, \check{a}, \check{b}, \check{c}, B \}$

$\delta = \{ ((q_0, B), (q_e, B, r)),$ leeres Wort sofort akzeptieren

$((q_0, a), (q_1, \check{a}, r)),$

$((q_1, a), (q_1, a, r)),$

$((q_1, b), (q_2, \check{b}, r)),$

$((q_1, \check{b}), (q_1, \check{b}, r)),$

$((q_2, b), (q_2, b, r)),$

$((q_2, c), (q_3, \check{c}, l)),$

$((q_2, \check{c}), (q_2, \check{c}, r)),$

$((q_3, \check{c}), (q_3, \check{c}, l)),$

$((q_3, b), (q_3, b, l)),$

$((q_3, \check{b}), (q_3, \check{b}, l)),$

$((q_3, a), (q_3, a, l)),$

$((q_3, \check{a}), (q_0, \check{a}, r)),$

$((q_0, \check{b}), (q_4, \check{b}, r)),$

Aufgabe 1 b. (Forts.)

$((q_4, \check{b}), (q_4, \check{b}, r)),$

$((q_4, \check{c}), (q_5, \check{c}, r)),$

$((q_5, \check{c}), (q_5, \check{c}, r)),$

$((q_5, B), (q_e, B, r))\ \}$

$q_0\, a\ a\ b\ b\ c\ c$

$\check{a}\, q_1\, a\ b\ b\ c\ c$

$\check{a}\ a\, q_1\, b\ b\ c\ c$

$\check{a}\ a\ \check{b}\, q_2\, b\ c\ c$

$\check{a}\ a\ \check{b}\ b\, q_2\, c\ c$

$\check{a}\ a\ \check{b}\, q_3\, b\ \check{c}\ c$

$\check{a}\ a\, q_3\, \check{b}\ b\ \check{c}\ c$

$\check{a}\, q_3\, a\ \check{b}\ b\ \check{c}\ c$

$q_3\, \check{a}\ a\ \check{b}\ b\ \check{c}\ c$

$\check{a}\, q_0\, a\ \check{b}\ b\ \check{c}\ c$

$\check{a}\ \check{a}\, q_1\, \check{b}\ b\ \check{c}\ c$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\, q_1\, b\ \check{c}\ c$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\ \check{b}\, q_2\, \check{c}\ c$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\ \check{b}\ \check{c}\, q_2\, c$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\ \check{b}\, q_3\, \check{c}\ \check{c}$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\, q_3\, \check{b}\ \check{c}\ \check{c}$

$\check{a}\ \check{a}\, q_3\, \check{b}\ \check{b}\ \check{c}\ \check{c}$

$\check{a}\, q_3\, \check{a}\ \check{b}\ \check{b}\ \check{c}\ \check{c}$

$\check{a}\ \check{a}\, q_0\, \check{b}\ \check{b}\ \check{c}\ \check{c}$

$\check{a}\ \check{a}\, q_0\, \check{b}\ \check{b}\ \check{c}\ \check{c}$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\, q_4\, \check{b}\ \check{c}\ \check{c}$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\ \check{b}\, q_4\, \check{c}\ \check{c}$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\ \check{b}\ \check{c}\, q_5\, \check{c}$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\ \check{b}\ \check{c}\ \check{c}\, q_5$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\ \check{b}\ \check{c}\ \check{c}\ B\, q_e$

also
aabbcc L(A)

Aufgabe 1 b. (Forts.)

$q_0\, a\ a\ b\ c\ c$

$\check{a}\, q_1\, a\ b\ c\ c$

$\check{a}\ a\, q_1\, b\ c\ c$

$\check{a}\ a\ \check{b}\, q_2\, c\ c$

$\check{a}\ a\, q_3\, \check{b}\ \check{c}\ c$

$\check{a}\, q_3\, a\ \check{b}\ \check{c}\ c$

$q_3\, \check{a}\ a\ \check{b}\ \check{c}\ c$

$\check{a}\, q_0\, a\ \check{b}\ \check{c}\ c$

$\check{a}\ \check{a}\, q_1\, \check{b}\ \check{c}\ c$

$\check{a}\ \check{a}\ \check{b}\, q_1\, \check{c}\ c$

Turing-Maschine hält,
ohne zu akzeptieren

Aufgabe 2

Blatt 11

5

a, $\gamma \# \overleftarrow{\gamma'} \in L_1$ gdw $\gamma \vdash_M \gamma'$

$S \to X \mid Y$

$X \to a X a, \quad a \in \Gamma$ erzeugt $\alpha X \overleftarrow{\alpha}$

1 $X \to q b_1 Z p b_1', \quad ((q, b_1), (p, b_1, r)) \in \delta$

erzeugt $\alpha q b_1 Z p b_1' \overleftarrow{\alpha}$

(*) $\left\{ \begin{array}{l} Z \to a Z a, \quad a \in \Gamma \\ Z \to \# \end{array} \right.$

erzeugt

$\alpha q b_1 \beta \# \vec{\beta} p b_1' \overleftarrow{\alpha}$

gdw

$\alpha q b_1 \beta \underset{1}{\vdash_M} \alpha b_1' p \beta$

2 $X \to a_k q b_1 Z b_1' a_k p, \quad ((q, b_1), (p, b_1', l)) \in \delta$

$a_k \in \Gamma$

erzeugt $\alpha a_k q b_1 Z b_1' a_k p \overleftarrow{\alpha}$

mit (*) $\alpha a_k q b_1 \beta \# \overleftarrow{\beta} b_1' a_k p \overleftarrow{\alpha}$

gdw

$\alpha a_k q b_1 \beta \underset{2}{\vdash_M} \alpha p a_k b_1' \beta$

3 $Y \to q b_1 Z b_1' \mathcal{B} p, \quad ((q, b_1), (p, b_1', l)) \in \delta$

$\alpha = \varepsilon$

erzeugt $q b_1 Z b_1' \mathcal{B} p$

mit (*) $q b_1 \beta \# \overleftarrow{\beta} b_1' \mathcal{B} p$

gdw

$q b_1 \beta \underset{3}{\vdash_M} p \mathcal{B} b_1' \beta$

Aufgabe 2 a. (Forts.)

Blatt 11

6

4 Diese Bedingung liefert in Kombination mit 1/2/3 drei weitere Regelformen $\beta = \emptyset$

4/1 $X \to q \# p b_1', \quad ((q, \mathcal{B}), (p, b_1', r)) \in \delta$

erzeugt $\alpha q \# p b_1' \overleftarrow{\alpha}$

gdw

$\alpha q \underset{4/1}{\vdash_M} \alpha b_1' p$

$\alpha q \mathcal{B} \vdash_M \alpha b_1' p$

4/2 $X \to a_k q \# b_1' a_k p, \quad ((q, \mathcal{B}), (p, b_1', l)) \in \delta$

$a_k \in \Gamma$

erzeugt $\alpha a_k q \# b_1' a_k p$

gdw

$\alpha a_k q \underset{4/2}{\vdash} \alpha p a_k b_1'$

4/3 $Y \to q \# b_1' \mathcal{B} p, \quad ((q, \mathcal{B}), (p, b_1', l)) \in \delta$

$\alpha = \varepsilon$
$\beta = \varepsilon$

erzeugt $q \# b_1' \mathcal{B} b$

gdw

$q \underset{4/3}{\vdash_M} p \mathcal{B} b_1'$

$q \mathcal{B} \vdash_M$

b, Die Sprache L_2 ist auch kontextfrei. Die Grammatik läßt sich analog zu a, konstruieren (man muß γ und γ' nur von links her aufbauen).

Aufgabe 2 (Forts.)

c) $L_3 = \{ \gamma \# \gamma' \mid \gamma \vdash_M \gamma' \}$

ist <u>nicht</u> kontextfrei ! (ohne Beweis)

Bereits die Sprache $\{ ww \mid w \in \Sigma^* \}$ ist nicht kontextfrei.

Dies kann man mit Hilfe des Pumping-Lemmas beweisen; der Grund ist, daß man die Zeichen nur in umgekehrter Reihenfolge vom Keller popen kann; man kann sich den Keller nicht von unten nach oben ansehen.

Aufgabe 4

Es gibt überabzählbar viele Probleme;
es gibt jedoch nur abzählbar viele Turing-Maschinen (bis auf Isomorphie).
Es können also nur abzählbar viele Probleme aufzählbar sein. Also gibt es überabzählbar viele Probleme, die nicht aufzählbar sind.

Aufgabe 3

a) Idee: Füge zum Generator M ein weiteres Band hinzu, das als Eingabeband dient.

Wir modifizieren nun M wie folgt. Wenn M ein # auf das Ausgabeband schreibt, fährt M zurück zum letzten # und vergleicht nun das Wort zwischen den beiden letzten # mit dem Wort der Eingabe.

Da die modifizierte Turingmaschine M' kein Generator ist, darf sie auf dem Ausgabeband auch nach links fahren!

Wenn es übereinstimmt, geht die Maschine in den akzeptierenden Zustand über, wenn nicht fährt der Kopf auf dem Ausgabeband wieder zur Position nach dem letzten # und setzt die Generierung der Worte fort.

Sie muß nur darauf achten, daß bei Wiederaufnahme der Berechnung von M der Kopf wieder an der gleichen Position steht und das Band nicht verändert wurde.

Die modifizierte Turing-Maschine M' akzeptiert ein Wort genau dann, wenn es von M generiert (zwischen zwei # ausgegeben wird).

Kurz: $L(M') = G(M)$

Aufgabe 3 (Forts.)

b) Grobe Idee: Sei $L = L(M')$

M probiert systematisch alle Wörter aus Σ^* durch und läßt M' auf diesen Wörtern laufen. Wenn M' das Wort akzeptiert, schreibt M das Wort auf das Ausgabeband (gefolgt von #). Wenn nicht, probiert M das nächste Wort.

Problem: Wenn M' auf einem Wort nie terminiert, werden alle nachfolgenden von M' akzeptierten Wörter von M auch nie auf das Ausgabeband geschrieben (also $L(M') \neq G(M)$).

Verbesserte Idee:

M generiert systematisch alle Paare von Wörtern $\Sigma^* \times \{1\}^*$. Für ein Paar $w \# \overbrace{11\ldots1}^{n}$ simuliert M die TM M' n-Schritte (falls möglich). Wenn w bis dahin akzeptiert wird (von M'), dann schreibt M das Wort w auf das Ausgabeband – gefolgt von #. Wenn das Wort nicht innerhalb von n Schritten von M akzeptiert wird, simuliert M' die Maschine mit dem nächsten Paar $w' \# 11\ldots1$. Da M alle Paare $w \# 11\ldots1$ generiert, wird jedes von M' akzeptierte Wort irgendwann auf das Ausgabeband geschrieben.