Aufgabe 1

a.) $S \to AB \qquad S \to C'A$

$A \to a$

$B \to BCD \qquad B \to AB$

$C' \to aB \qquad C' \to b$

$D \to aA$

Ermittlung der produktiven Variablen:

$V_0 = \{A, C\}$

$V_1 = \{A, C, S, D\}$

$V_2 = \{A, C, S, D\} \Rightarrow V_{prod} = \{A, C', S, D\}$

Resultierende Grammatik nach Schritt 1:

$S \to C'A$

$A \to a$

$C' \to b$

$D \to aA$

Ermitteln der erreichbaren Variablen:

$V_0 = \{S\}$

$V_1 = \{S, C', A\}$

$V_2 = \{S, C', A\} \Rightarrow V_{err} = \{S, C', A\}$

Resultierende Grammatik nach Schritt 2:

$S \to C'A \qquad A \to a \qquad C' \to b$

alle Variablen sind nützlich

Aufgabe 1 (Forts.)

b.) Sei $V_0, V_1, V_2, \ldots$ wie folgt induktiv definiert:

- $V_0 = \{A \in V \mid A \to w \in P \text{ mit } w \in \Sigma^*\}$
- $V_{i+1} = \{A \in V \mid A \to w \in P \text{ mit } w \in (\Sigma \cup V_i)^*\}$

Wir beweisen nun die folgenden Aussagen

1.) $V_i \subseteq V_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$

2.) $A \in V_i$ für ein $i \in \mathbb{N} \Rightarrow A$ produktiv d.h. $A \Rightarrow^* w \in \Sigma^*$

3.) A produktiv $\Rightarrow$ es gibt ein $i \in \mathbb{N}$ mit $A \in V_i$

4.) $V_i = V_{i+1} \Rightarrow$ für alle $j \geq i$ gilt $V_j = V_i$

ad 1.) Wir beweisen $V_i \subseteq V_{i+1}$ durch Induktion über i:

$i = 0$: $V_0 = \{A \in V \mid A \to w \in P \text{ mit } w \in \Sigma^*\}$
$\cap|$ $\qquad \cap|$
$V_1 = \{A \in V \mid A \to w \in P \text{ mit } w \in (\Sigma \cup V_0)^*\}$

$i \to i+1$: $V_{i+1} = \{A \in V \mid A \to w \in P \text{ mit } w \in (\Sigma \cup V_i)^*\}$
$\cap|$ $\qquad \cap|$ I.V.
$V_{i+2} = \{A \in V \mid A \to w \in P \text{ mit } w \in (\Sigma \cup V_{i+1})^*\}$

#

ad 2.) Wir beweisen durch Induktion über i, daß für $A \in V_i$ ein $w \in \Sigma^*$ mit $A \Rightarrow^* w$ existiert:

$i = 0$: $A \in V_0$, d.h. es ex. $A \to w \in \Sigma^*$

damit gilt $A \Rightarrow^* w$ ✓

Aufgabe 1b. (Forts.)

$i \to i+1$: $A \in V_{i+1}$, d.h. es ex. ein
$w \in (\Sigma \cup V_i)^*$ mit $A \to w \in P$
Sei: $w = x_1 \dots x_n$. Für $x_j \in \Sigma$
ex. $w_j = x_j \in \Sigma^*$ mit $x_j \Rightarrow^* w_j$.
Für $x_j \in V_i$ gibt es wegen
I.V. ein w_j mit $x_j \Rightarrow^* w_j \in \Sigma^*$
Wegen Lemma 3.2.2 gilt
$$A \Rightarrow w \Rightarrow^* w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$$

ad 3., A produktiv, d.h. es ex. ein $w \in \Sigma^*$
mit $A \Rightarrow^* w$, d.h. es ex. $w_1, \dots, w_n \in (\Sigma \cup V)^*$
mit $A = w_n \Rightarrow w_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow w_1 \Rightarrow w$

Wir zeigen durch Induktion über i,
daß gilt $w_{i+1} \in (\Sigma \cup V)^*$:

$i = 0$: Sei $w_1 = x_1 \dots x_n$. Wegen $w_1 \Rightarrow w \in \Sigma^*$
gilt für jedes x_j entweder $x_j \in \Sigma$ oder
$x_j \Rightarrow w'$ mit $w' \in \Sigma^*$ und $x_j \in V$.
Dann gibt es eine Produktion $x_j \to w'$
und damit ist $x_j \in V_0$.
Also $w_1 \in (\Sigma \cup V_0)^*$

$i \to i+1$: Sei $w_{i+2} = x_1 \dots x_n$ mit
$x_1 \dots x_n \Rightarrow w_{i+1} \in (\Sigma \cup V_i)^*$.
I.V.

Dann gilt für jedes x_j entweder
$x_j \in \Sigma \cup V_i$ oder $\Rightarrow w'$ mit $w' \in (\Sigma \cup V_i)^*$
wegen 1 $\subseteq \Sigma \cup V_{i+1}$
und damit $x_j \to w \in P$.
Also $x_j \in \Sigma \cup V_{i+1}$.

Aufgabe 1b (Forts.)

ad 4., Induktion über $j = i+1, i+2, \dots$

$j = i+1$: $V_{i+1} = V_i$ ist die Voraussetzung

$j \to j+1$: $V_j = \{ A \in V \mid A \to w \in P$ mit $w \in (\Sigma \cup V_j)^* \}$
$\| \quad$ $\| $ I.V.
V_{i+1} $\quad V_i$
$\| \leftarrow$ Voraussetzung
V_i

Nun wissen wir für i mit
$V_i = V_{i+1}$ gilt $V_i \subseteq \{ A \in V \mid A \text{ produktiv} \}$
(wg. 2.)

A produktiv $\Rightarrow$ ex. V_j mit $A \in V_j$;
falls $j < i$ gilt wegen 1., $A \in V_i$
falls $j \geq i$ gilt wegen 4., $A \in V_i$

Also $V_i = \{ A \in V \mid A \text{ ist produktiv} \}$

Blatt 8

⑤

Aufgabe 2

erreichbar S', A, B, C

produktiv A, B, C', S'

Achtung: Hier hatte sich ein Fehler in die Angabe eingeschlichen

$S \to aABC$

$A \to BCb$

$A \to b$

$B \to \varepsilon$

$B \to A$

$B \to SAC$

$C' \to BBa$

$C' \to \varepsilon$

ε-Elimination $\longrightarrow$

$V_0 = \{B, C'\}$

$V_1 = \{B, C\}$

$V_{null} = \{B, C\}$

$S' \to aABC \mid aAB \mid aAC \mid aA$

$A \to BCb \mid Cb \mid Bb \mid \cancel{b}$

$A \to b$

$\cancel{B \to \varepsilon}$

$B \to A$

$B \to S'AC \mid S'A$

$C' \to BBa \mid Ba \mid a$

$\cancel{C' \to \varepsilon}$

$B \to A$

$\downarrow$ Elimination der Kettenproduktionen

$S' \to aABC \mid aAAC$

$S' \to aAB \mid aAA$

$S' \to aAC$

$S' \to aA$

$A \to BCb \mid ACb$

$A \to Cb$

$A \to Bb \mid Ab$

$A \to b$

$B \to S'AC$

$B \to S'A$

$C \to BBa \mid ABa \mid BAa \mid AAa$

$C' \to Ba \mid Aa$

$C' \to a$

1. Schritt CNF $\longleftarrow$

B_a

B_b

$S' \to B_a ABC \mid B_a AAC$

$S' \to B_a AB \mid B_a AA$

$S' \to B_a AC$

$S' \to B_a A$

$A \to BCB_b \mid ACB_b$

$A \to CB_b$

$A \to BB_b \mid AB_b$

$A \to b$

$B \to SAC$

$B \to SA$

$C' \to BBB_a \mid ABB_a \mid BAB_a \mid AAB_a$

$C' \to BB_a \mid AB_a$

$C' \to a$

$B_a \to a$ $\quad B_b \to b$

Blatt 8

⑥

Aufgabe 2 (Forts.)

$S \to B_a C_1$ $\quad C_1 \to AC_2$ $\quad C'_2 \to BC$

$S' \to B_a C_3$ $\quad C'_3 \to AC_4$ $\quad C_4 \to AC$

$S' \to B_a C_5$ $\quad C'_5 \to AB$

$S' \to B_a C_6$ $\quad C'_6 \to AA$

$S' \to B_a C_7$ $\quad C_7 \to AC$

$S' \to B_a A$

$A \to BC_8$ $\quad C'_8 \to CB$

$A \to AC_9$ $\quad C'_9 \to CB_b$

$A \to CB_b$

$A \to BB_b$

$A \to AB_b$

$A \to b$

$B \to S'C_{10}$ $\quad C_{10} \to AC$

$B \to S'A$

$C' \to BC_{11}$ $\quad C_{11} \to BB_a$

$C' \to AC_{12}$ $\quad C_{12} \to BB_a$

$C' \to BC'_{13}$ $\quad C_{13} \to AB_a$

$C' \to AC_{14}$ $\quad C_{14} \to AB_a$

$C' \to BB_a$

$C' \to AB_a$

$C' \to a$

$B_a \to a$

$B_b \to b$

ich hoffe, ich habe mich nirgends verrechnet

Blatt 8

7

Korrig. ? 22.12.01

Aufgabe 3

$S \to AA$
$S \to aS$
~~$A \to SS$~~
$A \to b$

1. Schritt

$S \to AA$
$S \to aS$
Subst von S für A
$A \to AAS \mid aSS$
$A \to b$

"Rotation"

α_i : AS
β_i : aSS', b

$A \to aSS \mid b$
$A \to aSSB \mid bB$ neue Variable

$B \to AS$
$B \to ASB$

Ergebnis nach Schritt 1:

$S \to AA$
$S \to aS$
$A \to aSS$
$A \to b$
$A \to aSSB$
$A \to bB$

$B \to AS$
$B \to ASB$

Subst

Rückwärtssubst.

2. Schritt:

$S \to aSSA \mid bA \mid aSSBA \mid bBA$
$S \to aS'$
$A \to aSS'$
$A \to b$
$A \to aSSB$
$A \to bB$

3. Schritt

$B \to aSSS \mid bS \mid aSSBS' \mid bBS$
$B \to aSS'SB \mid bSB \mid aSSBSB \mid bBSB$

Blatt 8

zu 8

zu Aufgabe 4

zu a.) Berechnung des Automaten A für aabbab:

$qS \to aqSBS \to aaqSBSBS$
$\to aaqBSBS \to aabqSBS$
$\to aabqBS \to aabbqS$
$\to aabbaqSBS$
$\to aabbaqBS$
$\to aabbabqS$
$\to aabbabq$

zu b.) Berechnung des Automaten A' für aabbab:

$q_0S \to aq_1BS \to aaq_1BBS$
$\to aabq_1BS \to aabbq_1S$
$\to aabbq_1S$
$\to aabbaq_1BS$
$\to aabbabq_1S$
$\to aabbabq_0S$

zu Aufgabe 4

zu a., Berechnung des Automaten A für aabbab:

$$
\begin{aligned}
qS &\to aqSBS \to aaqSBSBS \\
&\to aaqBSBS \to aabqSBS \\
&\to aabqBS \to aabbqS \\
&\to aabbaqSBS \\
&\to aabbaqBS \\
&\to aabbabqS \\
&\to aabbabq
\end{aligned}
$$

zu b., Berechnung des Automaten A' für aabbab:

$$
\begin{aligned}
q_0S &\to aq_1BS \to aaq_1BBS \\
&\to aabq_1BS \to aabbq_1S \\
&\to aabbq_1S \\
&\to aabbaq_1BS \\
&\to aabbabq_1S \\
&\to aabbabq_0S
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 (Forts.)

c, Der Automat A' ist bereits deterministisch!

Es kann jedoch keinen deterministischen Kellerautomaten geben, der L(G) mit leerem Keller akzeptiert. Denn wenn das Wort ab von diesem Automaten mit leeren Keller akzeptiert wird, kann das Wort abab nicht akzeptiert werden, weil der Kellerautomat (wegen des leeren Kellers) nach dem Lesen von ab keine weiteren Übergänge mehr machen!

Ganz allgemein kann es für eine Sprache L mit $w \in L$ und $wu \in L$ mit $|u| \geq 1$ keinen deterministischen Kellerautomaten geben, der L mit leerem Keller akzeptiert! Dies zeigt, daß die Kellerautomaten, die eine Sprache mit leerem Keller akzeptieren, und die Kellerautomaten, die eine Sprache über Endzustände akzeptieren, im deterministischen Fall nicht äquivalent sind.

Abhilfe: \$ zum Markieren des Wortendes