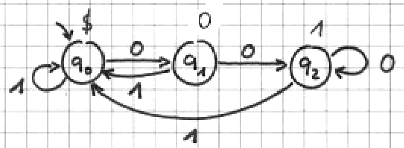
Aufgabe 1

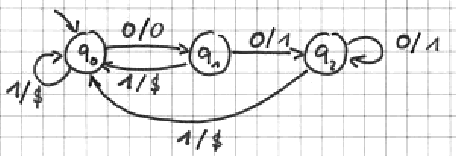
b.) Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall der Umwandlung eines Moore-Automaten in einen äquivalenten Mealy-Automaten.

Zunächst ein Beispiel:

Moore



Mealy



Beim Übergang im Mealy-Automaten wird jeweils das Ausgabezeichen des nächsten Zustandes des Moore-Automaten ausgegeben!

Moore: $\overset{\$}{q_0} \xrightarrow{0} \overset{0}{q_1} \xrightarrow{0} \overset{1}{q_2} \xrightarrow{1} \overset{\$}{q_0} \xrightarrow{0} \overset{0}{q_1}$

Mealy: $q_0 \xrightarrow[0]{0} q_1 \xrightarrow[1]{0} q_2 \xrightarrow[\$]{1} q_0 \xrightarrow[0]{0} q_1$

allgemein: $A = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ ein Moore-Automat

$\delta: Q \times \Sigma \to Q$

$\lambda: Q \to \Delta$

$\lambda^*(q, \varepsilon) = \lambda(q)$

$\lambda'^*(q, \varepsilon) = \varepsilon$

$A' = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda', q_0)$

mit $\lambda': Q \times \Sigma \to \Delta$

$$\lambda'(q, a) = \underbrace{\lambda(\underbrace{\delta(q, a)}_{\text{nächster Zustand}})}_{\text{Ausgabe des Moore-Automaten im nächsten Zustand}}$$

Aufgabe 1b (Forts.)

Für jedes $w \in \Sigma^*$ gilt: $\lambda^*(q, w) = \lambda(q) \circ \lambda'^*(q, w)$

Beweis per Induktion über die Länge von w:

$w = \varepsilon$: $\lambda^*(q, \varepsilon) \overset{\text{Def } \lambda^* \text{ Moore}}{=} \lambda(q) \overset{\text{Def } \lambda'^* \text{ Mealy}}{=} \lambda(q) \circ \underbrace{\lambda'^*(q, \varepsilon)}_{\varepsilon}$

$w \to aw$: $\lambda^*(q, aw) \overset{\text{Def } \lambda^* \text{ Moore}}{=} \lambda(q) \circ \lambda^*(\delta(q, a), w)$

$\overset{\text{I.V.}}{=} \lambda(q) \circ \lambda(\delta(q, a)) \circ \lambda'^*(\delta(q, a), w)$

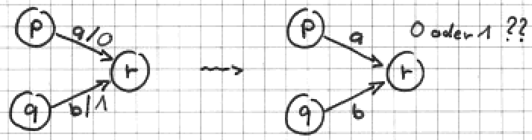
$\overset{\text{Def } \lambda'}{=} \lambda(q) \circ \lambda'(q, a) \circ \lambda'^*(\delta(q, a), w)$

$\overset{\text{Def } \lambda'^* \text{ Mealy}}{=} \lambda(q) \circ \lambda'^*(q, aw)$

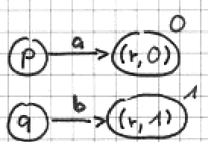
Insbesondere gilt: $\underbrace{\lambda^*(q_0, w)}_{\text{Moore}} = \underbrace{\lambda(q_0)}_{\$} \circ \underbrace{\lambda'^*(q, w)}_{\text{Mealy}}$

a.) Nun versuchen wir einen Mealy-Automaten in einen äquivalenten Moore-Automaten umzuwandeln:

Problem:



Bessere Idee:



$\Rightarrow$ Zustände des Moore-Automaten: $Q \times \Delta$

Aufgabe 1a (Forts.)

$A = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda, q_0)$ $\quad \delta: Q \times \Sigma \to Q$

Mealy-Automat $\quad \lambda: Q \times \Sigma \to \Delta$

Wir definieren:

$A' = (Q \times \Delta, \Sigma, \Delta, \delta', \lambda', q_0')$

Moore-Automat mit

$\delta': (Q \times \Delta) \times \Sigma \to Q \times \Delta$

Übergang des Mealy-Automaten entspr. Ausgabe

wobei $\delta'((q,b), a) = (\delta(q,a), \lambda(q,a))$

und $\lambda': Q \times \Delta \to \Delta$

wobei $\lambda'((q,b)) = b$

und $q_0' = (q_0, b)$ für irgendein $b \in \Delta$

Es gilt für jedes $(q,b) \in Q \times \Delta$ und jedes $w \in \Sigma^*$: $\lambda'^*((q,b), w) = \lambda'((q,b)) \circ \lambda^*(q, w)$

Beweis durch Induktion über die Länge von w:

$w = \varepsilon$: $\lambda'^*((q,b), w) \overset{\text{Def-Moore } \lambda'^*}{=} \lambda'((q,b)) = \lambda'(q,b) \circ \underbrace{\lambda^*(q,\varepsilon)}_{= \varepsilon \text{ Def Mealy}}$

$w = aw$: $\lambda'^*((q,b), aw) \overset{\text{Def } \lambda^* \text{ Moore}}{=} \lambda'(q,b) \circ \lambda'^*(\underbrace{\delta'((q,b),a)}_{= (\delta(q,a), \lambda(q,a)) \text{ Def } \delta'}, w)$

I.V.

$= \lambda'(q,b) \circ \underbrace{\lambda'(\delta'((q,b),a))}_{= \text{Def } \lambda'} \circ \lambda^*(\delta(q,a), w)$

$= \lambda'(q,b) \circ \underbrace{\lambda(q,a) \circ \lambda^*(\delta(q,a), w)}_{= \text{Def } \lambda^* \text{ Mealy}}$

$= \lambda'(q,b) \circ \lambda^*(q, aw)$

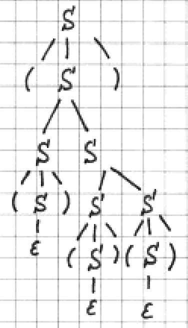
Insbes. gilt: $\lambda'^*((q_0,b), w) = \lambda'(q_0,b) \circ \lambda^*(q_0, w)$

Moore $\quad$ $\$$ $\quad$ Mealy

Aufgabe 2

$S \to \varepsilon$
$S \to (S)$
$S \to SS$

b)



a) $S \Rightarrow (S)$
$\Rightarrow (S \underline{\underline{S}})$
$\Rightarrow (S S S)$
$\Rightarrow ((S) S S)$
$\Rightarrow (() S S)$
$\Rightarrow (() (S) S)$
$\Rightarrow (() () S)$
$\Rightarrow (() () (S))$
$\Rightarrow (() () ())$

hier ist nicht klar, welches S ersetzt wurde

c) $S \overset{L}{\Rightarrow} (S) \overset{L}{\Rightarrow} (S S)$
$\overset{L}{\Rightarrow} ((S) S) \overset{L}{\Rightarrow} (() S)$
$\overset{L}{\Rightarrow} (() S S) \overset{L}{\Rightarrow} (() (S) S)$
$\overset{L}{\Rightarrow} (() () S) \overset{L}{\Rightarrow} (() () (S))$
$\overset{L}{\Rightarrow} (() () ())$

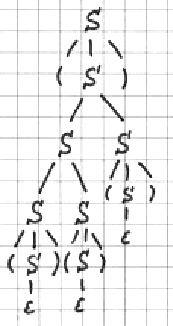
Linksableitung

$S \overset{R}{\Rightarrow} (S) \overset{R}{\Rightarrow} (S \underline{\underline{S}})$ klar, da Rechtsableitung
$\overset{R}{\Rightarrow} (S S S) \overset{R}{\Rightarrow} (S S (S))$
$\overset{R}{\Rightarrow} (S S ()) \overset{R}{\Rightarrow} (S (S) ())$
$\overset{R}{\Rightarrow} (S () ()) \overset{R}{\Rightarrow} ((S) () ())$
$\overset{R}{\Rightarrow} (() () ())$

Rechtsableitung

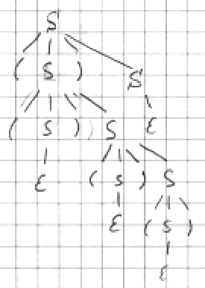
d) Die Grammatik ist nicht eindeutig, denn für das Wort $(()()())$ gibt es einen weiteren Ableitungsbaum:

Aufgabe 2 d. (Forts.)



Eine äquivalente eindeutige Grammatik ist:

$S' \to \varepsilon$
$S' \to (S)S'$



e) Nein, es gibt nicht zu jeder Ableitung der (ursprünglichen) Grammatik einen eindeutigen korrespondierenden Ableitungsbaum!

Die Bäume aus b und d sind beide mögliche Ableitungsbäume zur Ableitung aus Aufg. a.

Problem: Im 3. Ableitungsschritt

$$(S' S')$$
$$\Downarrow$$
$$(S' S' S')$$

ist nicht klar, auf welches S' die Regel $S' \to S'S'$ angewendet wird.

Wenn man in der Ableitung immer die Stelle markiert, wo die Produktion angewendet wird, ist der korrespondierende Ableitungsbaum eindeutig!

Aufgabe 3

a) $\alpha \Rightarrow_G^i \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma\alpha\delta \Rightarrow_G^i \gamma\beta\delta$

Folgt unmittelbar aus der Definition von $\Rightarrow_G$.
Beweis durch Induktion über die Länge i der Ableitung:

$i = 0$: $\alpha \Rightarrow_G^0 \beta$, d.h. $\alpha = \beta$.
Also auch $\gamma\alpha\delta = \gamma\beta\delta$ und damit $\gamma\alpha\delta \Rightarrow_G^0 \gamma\beta\delta$

$i \to i+1$: $\alpha \Rightarrow_G^{i+1} \beta$, d.h. $\alpha \Rightarrow_G \beta' \Rightarrow_G^i \beta$
Gemäß I.V. gilt $\gamma\beta'\delta \Rightarrow_G^i \gamma\beta\delta$.
Gemäß Def. 1.2 gilt $\alpha \Rightarrow_G \beta'$ wenn eine Produktion $v \to w \in P$ und $\alpha = \alpha' v \alpha''$ mit $\beta' = \alpha' w \alpha''$ existiert.
Gemäß Def. 1.2 gilt dann auch
$\gamma\alpha\delta = \gamma\alpha' v \alpha''\delta \Rightarrow_G \gamma\alpha' w \alpha''\delta = \gamma\beta'\delta$
Insgesamt gilt: $\gamma\alpha\delta \Rightarrow_G^{i+1} \gamma\beta\delta$

b) $\alpha_l \Rightarrow_G^{i_l} \beta_l \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \dots \alpha_n \Rightarrow^i \beta_1 \dots \beta_n$ mit $i = \sum_{l=1}^{n} i_l$

Aus a folgt unmittelbar:

$$\beta_1 \dots \beta_{j-1}\alpha_j\alpha_{j+1} \dots \alpha_n \Rightarrow^{i_j} \beta_1 \dots \beta_{j-1}\beta_j\alpha_{j+1} \dots \alpha_n$$

Induktion über j ergibt:

$$\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \Rightarrow_G^{i_1} \beta_1\alpha_2 \dots \alpha_n$$
$$\Rightarrow_G^{i_2} \beta_1\beta_2\alpha_3 \dots \alpha_n \Rightarrow_G^{i_3} \dots \Rightarrow_G^{i_n} \beta_1\beta_2 \dots \beta_n$$

Wenn $\alpha_l \Rightarrow^{i_l} \beta_l$ Linksableitung, dann auch $\alpha_1 \dots \alpha_n \Rightarrow_G^i \beta_1 \dots \beta_n$

Also $\alpha_1 \dots \alpha_n \Rightarrow^i \beta_1 \dots \beta_n$ mit $i = \sum_{j=1}^{n} i_j$

Aufgabe 3 (Forts.)

c.) $\alpha_1 \dots \alpha_n \Rightarrow_G^i \beta$, G kontextfrei

$\Rightarrow$ ex. $\beta_1 \dots \beta_n$ mit $\beta = \beta_1 \dots \beta_n$
und $\alpha_l \Rightarrow^{i_l} \beta_l$ und $i = \sum_{l=1}^{n} i_l$

Beweis durch Induktion über die Länge i der Ableitung:

$i = 0$: $\alpha_1 \dots \alpha_n \Rightarrow_G^0 \beta$, d.h. $\beta = \alpha_1 \dots \alpha_n$;
wähle $\beta_l = \alpha_l$.

$i \to i+1$: $\alpha_1 \dots \alpha_n \Rightarrow_G^{i+1} \beta$. Gemäß Def. 1.2 gibt es dann eine Produktion $A \to w \in P$ und ein α_j mit $\alpha_j = \alpha_1' \dots \alpha_{l-1}' A \alpha_{l+1}' \dots \alpha_k'$,
so daß

$$\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \overbrace{| \alpha_1' \dots \alpha_{l-1}' A \alpha_{l+1}' \dots \alpha_k' |}^{\alpha_j} \alpha_{j+1} \dots \alpha_n$$

$$\Rightarrow_G \alpha_1 \dots \alpha_{j-1} \underbrace{| \alpha_1' \dots \alpha_{l-1}' w \alpha_{l+1}' \dots \alpha_k' |}_{\alpha_j'} \alpha_{j+1} \dots \alpha_n$$

$$\Rightarrow_G^i \beta$$

Wähle $\alpha_j' = \alpha_1' \dots \alpha_{l-1}' w \alpha_{l+1}' \dots \alpha_k'$.
Gemäß I.V. gibt es $\beta_1, \dots, \beta_n$ und $i_1, \dots, i_n$ mit

$\alpha_{l'} \Rightarrow^{i_{l'}} \beta_{l'}$ für $l' \neq j$
und $\alpha_j' \Rightarrow^{i_j} \beta_j$ für
und $i = \sum_{l'=1}^{n} i_{l'}$

Insbes. gilt $\alpha_j \Rightarrow_G \alpha_j' \Rightarrow^{i_j} \beta_j$
also $\alpha_j \Rightarrow_G^{i_j+1} \beta_j$
und
$\alpha_{l'} \Rightarrow^{i_{l'}} \beta_{l'}$ $l' \neq j$

$$i+1 = \sum_{l' \neq j} i_{l'} + (i_j + 1)$$