Aufgabe 1

a.) $L = \{ w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b \}$

Wir beweisen durch Widerspruch, daß L nicht regulär. Wir nehmen also an, daß L regulär sei. Gemäß des Pumping-Lemmas existiert dann ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für jedes Wort $x \in L$ mit $|x| \geq n$ eine Zerlegung von $x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ mit $uw \in L$ existiert.

Wir wählen $x = \underbrace{a \ldots a}_{n\ a's} \underbrace{b \ldots b}_{n\ b's}$.

Dann gilt $u = a^k$ mit $k \leq n$ und $v = a^l$ mit $l \geq 1$ und $w = a^m b^n$ mit $m = (n-k) - l$.

Es gilt $uw = a^k a^m b^n \notin L$, da $k + m < n$. ↯

b.) Die Sprache $L = c^* a^n b^n + (a+b)^*$ ist nicht regulär (siehe c.), aber für jedes Wort $x \in L$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ finden wir ein Zerlegung $x = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $|v| \geq 1$ mit $uv^*w \in L$:

$a^n b^n = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

1. Fall: $x = a x' \in L \Rightarrow x' \in a^* b^* \cup (a+b)^* = (a+b)^*$

wähle u, v, w beliebig mit $x = uvw$.

Dann gilt $uv^*w \in (a+b)^* \subseteq L$

2. Fall $x = b x' \in L \Rightarrow x' \in (a+b)^*$

$\Rightarrow$ für alle Zerlegungen $x = uvw$ gilt $uv^*w \in (a+b)^* \subseteq L$

Aufgabe 1 b (Forts.)

3. Fall: $x = c x' \in L$ mit $x' \in c^* a^n b^n$

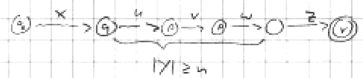
wähle $u = \varepsilon$ $v = c$ $w = x'$

$\Rightarrow uv^*w \in c^* a^n b^n \subseteq L$

Das Pumping-Lemma liefert also keinen Widerspruch dazu, daß L regulär ist.

c.) Diese Verallgemeinerung des Pumping-Lemmas gilt!

Der Beweis ist wie der in der Vorlesung, außer daß wir mit dem Zustand q mit $(q_0, x, q) \in \delta^*$ beginnen.



Mit Hilfe des verallgemeinerten Pumping-Lemmas können wir nun einfach zeigen, daß

$$c^* a^n b^n + (a+b)^*$$

nicht regulär ist:

wähle $c \quad a^n \quad b^n$ — n des Pumping-Lemma mit n >

$x \quad y \quad z$

$uvw \quad |v| \geq 1$

$c\,uw\,b^n = c\,a^l\,b^n \quad l < n$

$\Rightarrow c a^l b^n \notin L$ ↯

Aufgabe 2

Blatt 4 (3)

a) $h(L) = a(bc)^*(da)^*$ Einsetzen von a für e

Bem: Diese Menge ist gemäß Blatt 2 nicht lokal!

b) Also sind lokale Mengen nicht unter Homomorphismen abgeschlossen, denn $a(bc)^*(de)^*$ ist lokal:

$B = \{a\}$

$E = \{a, c, e\}$

$R = \Sigma\Sigma \setminus \{ab, ad, bc, cb, cd, ed\}$

c) Wähle $L' = a_1 b^* a_2 c^* a_3$ über $\Delta = \{a_1, a_2, a_3, b, c\}$.

L' ist lokal: $B = \{a_1\}$ $E = \{a_3\}$

$R = \Sigma\Sigma \setminus \{a_1 b, a_1 a_2, bb, ba_2, a_2 c, a_2 a_3, ca_3, cc\}$

wähle $h(a_1) = h(a_2) = h(a_3) = a$

$h(b) = b$

$h(c) = c$

Dann gilt $h(L') = ab^*ac^*a$

Einsetzen von a für a_1, a_2 bzw a_3

d) Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat, der L akzeptiert. Wir charakterisieren zunächst die akzeptierenden Pfade

$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \to \dots \xrightarrow{a_n} q_n \quad q_n \in F$

bzw. die Sequenz $(\bullet, q_0)(a_1, q_1)(a_2, q_2)\dots(a_n, q_n)$

Aufgabe 2 d. (Fortsetzung)

Blatt 4 (4)

als lokale Menge L' über $\Delta = (\Sigma \cup \{\bullet\}) \times Q$ (wobei $\bullet \notin \Sigma$).

$B = \{(\bullet, q_0)\}$

$E = \{(a, q) \mid a \in \Sigma \cup \{\bullet\}, q \in F\}$

$R = \Delta\Delta \setminus \{(a, q)(b, p) \mid a \in \Sigma \cup \{\bullet\}, b \in \Sigma, p, q \in Q, (q, b, p) \in \delta\}$

Offensichtlich beschreibt diese Menge gerade die Menge der akzeptierenden Pfade.

Wir definieren nun $h: \Delta \to \Sigma^*$ durch

$h((\bullet, q)) = \varepsilon$ für alle $q \in Q$

$h((a, q)) = a$ für alle $a \in \Sigma$ und $q \in Q$

Dann gilt $h(L') = L$, denn $h(w)$ ist das Wort, das auf dem akzeptierenden Pfad gelesen wird.

Aufgabe 3

a) Alle Aussagen sind falsch:

- Jede Menge L läßt sich als unendliche Vereinigung darstellen: $L = \bigcup_{w \in L} \{w\}$

  Jedes $\{w\}$ ist regulär, aber nicht jede Sprache L ist regulär.

- $\bigcup_{i \in I} L_i = \overline{\bigcap_{i \in I} \overline{L_i}}$, d.h. wenn die Menge der regulären Sprachen unter unendlichem Durchschnitt vereinigt wäre, wäre sie auch unter unendlicher Vereinigung abgeschlossen (was wir oben bereits widerlegt haben)

  Oder direkt: Jede Sprache L läßt sich als unendlichen Durchschnitt $L = \bigcap_{w \notin L} \overline{\{w\}}$ darstellen

- Jede Sprache L ist Teilmenge der regulären Sprache Σ^*

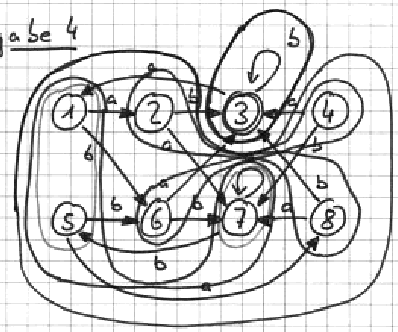
- Jede Sprache L ist Obermenge der regulären Sprache $\emptyset$

b) Wir definieren $\overleftarrow{r}$ induktiv:

- $\overleftarrow{\emptyset} = \emptyset$
- $\overleftarrow{\varepsilon} = \varepsilon$
- $\overleftarrow{a} = a$
- $\overleftarrow{(r+s)} = (\overleftarrow{r} + \overleftarrow{s})$
- $\overleftarrow{(rs)} = (\overleftarrow{s}\,\overleftarrow{r})$
- $\overleftarrow{r^*} = \overleftarrow{r}^*$

Aufgabe 4

a)



2	≠						
3	≠	≠					
4	≠	≠	≠				
5		≠	≠	≠			
6	≠	≠	≠		≠		
7	≠	≠	≠	≠		≠	
8	≠		≠	≠	≠	≠	≠
	1	2	3	4	5	6	7

1. Schritt:

$3 \neq 1$ $\quad 3 \neq 5$
$3 \neq 2$ $\quad 3 \neq 6$
$3 \neq 4$ $\quad 3 \neq 7$
$\quad 3 \neq 8$

2. Schritt

$1 \xrightarrow{b} 6$, $2 \xrightarrow{b} 3$ ⇒ $1 \neq 2$

$1 \xrightarrow{a} 2$, $4 \xrightarrow{a} 3$ ⇒ $1 \neq 4$

$1 \xrightarrow{a} 2$, $6 \xrightarrow{a} 3$ ⇒ $1 \neq 6$

$1 \xrightarrow{b} 6$, $8 \xrightarrow{b} 3$ ⇒ $1 \neq 8$

$2 \xrightarrow{a} 7$, $4 \xrightarrow{a} 3$ ⇒ $2 \neq 4$

$2 \xrightarrow{b} 3$, $5 \xrightarrow{b} 6$ ⇒ $2 \neq 5$

$2 \xrightarrow{b} 3$, $6 \xrightarrow{b} 7$ ⇒ $2 \neq 6$

$2 \xrightarrow{b} 3$, $7 \xrightarrow{b} 5$ ⇒ $2 \neq 7$

$4 \xrightarrow{a} 3$, $5 \xrightarrow{a} 8$ ⇒ $4 \neq 5$

$4 \xrightarrow{a} 3$, $7 \xrightarrow{a} 7$ ⇒ $4 \neq 7$

$4 \xrightarrow{b} 3$, $8 \xrightarrow{a} 7$ ⇒ $4 \neq 8$

$5 \xrightarrow{a} 7$, $6 \xrightarrow{a} 3$ ⇒ $5 \neq 6$

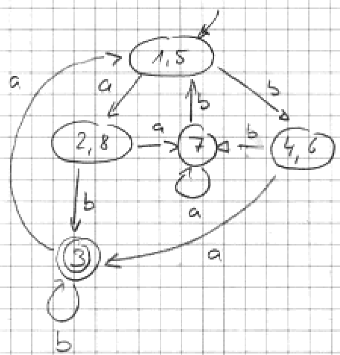
$5 \xrightarrow{b} 6$, $8 \xrightarrow{b} 3$ ⇒ $5 \neq 8$

$6 \xrightarrow{a} 3$, $7 \xrightarrow{a} 7$ ⇒ $6 \neq 7$

$7 \xrightarrow{b} 5$, $8 \xrightarrow{b} 3$ ⇒ $7 \neq 8$ $\quad$ $6 \xrightarrow{a} 3$, $8 \xrightarrow{a} 7$ ⇒ $6 \neq 8$

3. Schritt:

$1 \xrightarrow{a} 2$, $7 \xrightarrow{a} 7$ ⇒ $1 \neq 7$



Blatt 4

7

Aufgabe 4 (Forts.)

b) • Der linke Automat ist determinstisch und vollständig. Außerdem ist er minimal:

p	≠	
r	≠	≠
	q	p

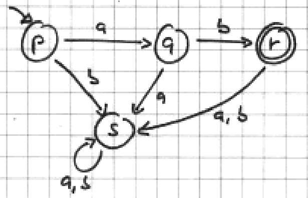
1. Schritt: $p \neq q \quad r \neq q$

2. Schritt: $\begin{array}{l} p \xrightarrow{b} q \\ r \xrightarrow{a} p \end{array} \; \neq \;\Rightarrow\; p \neq r$

Keine zwei Zustände sind äquivalent

Also gilt: Der Index von R_L ist die Anzahl der Zustände des Automaten: 3

• Der rechte Automat ist nicht vollständig. Vervollständigung ergibt:



Dieser Automat ist auch minimal:

q	≠		
r	≠	≠	
s	≠	≠	≠
	p	q	r

1. Schritt: $r \neq p, \; r \neq q, \; r \neq s$

2. Schritt: $\begin{array}{l} p \xrightarrow{b} s \\ q \xrightarrow{b} r \end{array} \; \neq \;\Rightarrow\; p \neq q$

$\begin{array}{l} q \xrightarrow{b} r \\ s \xrightarrow{b} s \end{array} \; \neq \;\Rightarrow\; q \neq s$

3. Schritt: $\begin{array}{l} p \xrightarrow{a} q \\ s \xrightarrow{a} s \end{array} \; \neq \;\Rightarrow\; p \neq s$

Also ist der Index von R_L 4 !